

2.4. Рабочая программа

дополнительной профессиональной программы повышения квалификации

«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ В РАМКАХ ПОДГОТОВКИ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ГИА (ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ)»

Модуль 1. Уравнения, неравенства и системы с параметром

Тема 1: Аналитический способ решения уравнений, неравенств и их систем с параметром (лекция – 2 ч., практическое занятие – 6 ч.)

Лекция. Анализ решений линейного уравнения с параметром. Квадратное уравнение с параметром и анализ его решения. Учёт области допустимых значений при решении в дробно-рациональных, логарифмических и иррациональных уравнениях с параметром. Теорема Виета и её следствия. Расположения корней квадратного трёхчлена относительно заданных точек и интервалов. Линейные неравенства с параметром. Метод интервалов. Системы линейных уравнений с параметром. Системы, содержащие квадратное уравнение.

Практическое занятие:

Задание № 1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a - 1)x = a^2 - 1$$

имеет:

- а) единственный корень;
- б) бесконечно много корней;
- с) не имеет корней.

Задание № 2. Для каждого из следующих неравенств найдите все значения параметра a , при которых неравенство имеет хотя бы одно решение:

- 1) $(a - 1)x > a + 1$;
- 2) $(a + 2)x \leq a^2 - 4$.

Задание № 3. Для системы

$$\begin{cases} (a - 1)x + 2y = a \\ 2x + ay = 1 \end{cases}$$

найдите все значения параметра a , при котором система:

- а) имеет единственное решение;
- б) не имеет решений;
- с) имеет бесконечно много решений.

Задание № 4. Для каждого из следующих уравнений найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет решение.

- а) $(a + 2)x^2 + (a - 1)x + a = 0$;
- б) $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$.

Задание № 5. Найдите все значения параметра a , при которых:

- а) корни уравнения $x^2 - 2ax + (a^2 - 4) = 0$ принадлежат отрезку $[-1; 3]$.
- б) уравнение $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ имеет два различных корня, причём оба корня меньше 1.

Задание № 6. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $ax^2 - (a + 1)x + 1 > 0$ выполняется для всех действительных x .

Задание № 7. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} y = x^2 + ax + 1 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Задание № 8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения:

а) $\frac{x^2 - (a+2)x + 2a}{x-a} = 0$;

б) $\sqrt{x^2 - a} = x - a$

имеют ровно один корень.

Задание № 9. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_a(x^2 - 2ax + a^2 - 4a + 3) = 0$ имеет ровно два решения.

Тема 2. Графический способ решения уравнений, неравенств и их систем с параметром (лекция – 2 ч., практическое занятие – 6 ч.)

Лекция. Изображение решений на координатной плоскости $(x; y)$. Построение базовых фигур в координатной плоскости: прямые, параболы, окружности, их преобразования при изменении параметра. Условие касания двух кривых. Фазовая плоскость $(x; a)$. Алгоритм построения множеств точек на фазовой плоскости. Геометрическая интерпретация выражений входящих в состав уравнений и неравенств. Графическое решение неравенств с параметром в координатной и фазовой плоскостях.

Практическое задание:

Задание № 1. Используя графический способ, исследуйте количество решений уравнений, в зависимости от значения параметра a :

1. $a = |x| + |x - 2|$;

2. $a = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$.

Задание № 2. Для каждой из следующих систем найдите все значения параметра a , при которых система имеет: ровно одно решение; ровно два решения; не имеет решений.

1. $\begin{cases} (x - a)^2 + y^2 = 1, \\ y = x \end{cases}$;

2. $\begin{cases} y = x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Задание № 3. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (a - 2)^2}$$

в зависимости от значения параметра a .

Задание № 4. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x - a| + |y| \leq 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет два решения.

Задание № 5. Для каждого из следующих неравенств постройте на плоскости $(x; a)$ или $(x; y)$ множество точек, удовлетворяющих неравенству, и найдите значения параметра a , при которых неравенство имеет хотя бы одно решение:

- 1) $a > x^2 - 4x + 3$;
- 2) $|x| + |x - a| < 2$;
- 3) $\sqrt{x^2 - a} > x - 1$.

Задание № 6. Найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a \\ y \geq x \end{cases}$ имеет непустое множество решений.

Задание № 7. Найдите все значения параметра a , при которых:

- а) уравнение $a = x^2 - 2|x|$ имеет ровно три корня;
- б) система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1 \end{cases}$ имеет ровно одно решение.

Тема 3. Функциональный метод в решении задач с параметром (лекция – 2 ч., практическое занятие – 6 ч.)

Лекция. Использование области определения функции при решении задач с параметром. Использование свойств функции при решении задач с параметром: ограниченность; монотонность; четность или нечетность; периодичность. Уравнение касательной. Геометрический смысл производной. Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы.

Практическое занятие:

Задание № 1. Для каждого из следующих уравнений найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет хотя бы один корень:

1. $\sqrt{x^2 - 2x + a} = 1 - a$;
2. $\sin x + \cos x = a$;
3. $a = x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Задание № 2. Используя область определения функции, найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет решение:

1. $\log_a(x - 2) = 1$;
2. $\sqrt{x + a} = x$.

Задание № 3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(x^2 + a)^3 + x^2 + a = (2x - a)^3 + 2x - a$ имеет решение.

Задание № 4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет ровно один корень:

1. $\sqrt{x} = ax + 1$;
2. $x^2 = a$ на отрезке $[-1; 1]$.

Задание № 5. Исследуйте функцию $f(x)$ на монотонность, определите ее точки экстремума и постройте ее график. Определите количество корней уравнения $f(x) = a$ при всех значениях параметра a :

1. $f(x) = x^3 - 3x$;
2. $f(x) = x^4 - 4x^2$.

Задание № 6. Используя свойства чётности/нечётности:

1) найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^4 - 2ax^2 + a^2 - 1 = 0$ имеет ровно два корня;

2) найдите все значения параметра a , при которых система $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = 1 \end{cases}$ имеет решение.

Тема 4. Подходы и приёмы решения задач с параметром (лекция – 2 ч., практическое занятие – 6 ч.)

Лекция. Метод рационализации. Формулы рационализации. Метод замены переменной в задачах с параметром. Метод перепараметризации. Метод введения новой переменной. Использование симметричных замен для систем.

Практическое занятие:

Задание № 1. Для каждого из следующих неравенств найдите все значения параметра a , при которых неравенство имеет решение:

- 1) $\log_a(x^2 - 2x) > 1$;
- 2) $(a - 1)^{x^2 + 2x} > (a - 1)^{3x}$;
- 3) $\log_{x-a}(x + 1) > 0$;
- 4) $\log_a(x^2 - 1) < \log_a(2x + 1)$.

Задание № 2. Для каждого из следующих уравнений найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет хотя бы один корень:

- 1) $4^x - 2^{x+1} - a = 0$;
- 2) $\sin^2 x + a \cdot \sin x - a = 0$;
- 3) $\log_a x + \log_x a = 2$;
- 4) $9^x - (a + 1)3^x + a = 0$;
- 5) $\cos 2x + a \cos x + a = 0$.

Задание № 3. Для каждого из следующих уравнений введите новую переменную так, чтобы параметр исчез или упростился, затем найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет решение:

1) $x^2 + (a + 1)x + a = 0$;

2) $(x^2 + a^2 = 2ax + 1)$;

3) $\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Задание № 4. Используя симметричную замену, решите следующие системы с параметром:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a; \\ xy = 1 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x + y = a \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$.